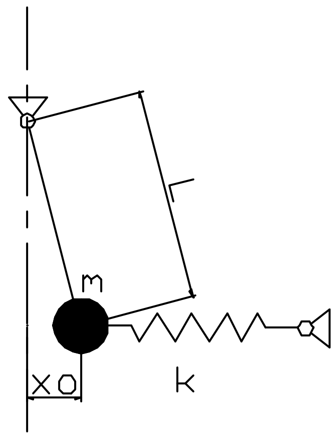
ACCEDE - INGENIERÍA AERONÁUTICA

PROBLEMA Nº 6

SITUACIÓN

Para el sistema de la figura que consiste de un cable rígido de masa despreciable y longitud "L", la masa puntual de valor "m", el resorte lineal de rigidez "k", que en el instante inicial se encuentra en la posición definida por "xo" y teniendo en cuenta que el modo de fijación del resorte lo mantiene paralelo a la posición inicial.



INFORMACIÓN A TENER EN CUENTA

Las ecuaciones de Lagrange pueden expresarse en la forma general

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1,2,...,n)$$

Con $L = T - V$

SUBPROBLEMA 6.1

Indicar que representan y bajo que condiciones los términos Q_i pueden anularse

RESPUESTA AL SUBPROBLEMA 6.1

Las Q_i representan las cargas generalizadas, complementos en el sentido energético de los desplazamientos generalizados.

Pueden anularse cuando son conservativas, esto es derivan de una función potencial y en tal caso pueden incluirse como tal en la definición del Lagrangeano *L*.

SUBPROBLEMA 6.2
Plantear la(s) ecuación(es) diferencial(es) que describen el comportamiento del sistema de la figura

RESPUESTA AL SUBPROBLEMA 6.2
Utilizando como coordenada generalizada el ángulo que forma el eje de la barra rígida con la vertical (posición de equilibrio del sistema), las energías potencial, cinética y el Lagrangeano del sistema valen:

$$V(q) = m.g.L(1-\cos q) + \frac{1}{2}k.(L.sen q)^2$$

$$T\left(\dot{q}\right) = \frac{1}{2}m.L^2.\dot{q}^2$$

$$L\left(q,\dot{q}\right) = \frac{1}{2}m.L^2.\dot{q}^2 - m.g.L(1-\cos q) - \frac{1}{2}k.(L.sen q)^2$$

Aplicando la única ecuación de Lagrange que se requiere para describir el movimiento del sistema,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m.L^2.\dot{q}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = m.L^2.\ddot{q}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = -m.g.L.sen q - k.L^2.sen q.\cos q$$

Con lo que la ecuación diferencial de movimiento puede escribirse,

$$m.L^2.\ddot{q} + m.g.L.sen q + k.L^2.sen q \cos q = 0$$

$$\ddot{q} + \frac{g}{L} sen q + \frac{k}{m}.sen q \cos q = 0$$

SUBPROBLEMA 6.3
Indicar bajo que condiciones pueden formularse hipótesis que lleven a las ecuaciones a formas lineales

RESPUESTA AL SUBPROBLEMA 6.3
La ecuación diferencial obtenida es no lineal por la presencia de funciones trascendentes que tienen como argumento la incógnita del problema. Para obtener una forma lineal, debe restringirse el movimiento a ángulos suficientemente pequeños alrededor de la posición de equilibrio.

En este caso, el seno del ángulo puede reemplazarse con suficiente aproximación por el ángulo $(sen q \cong q)$ y el coseno por uno $(\cos q \cong 1)$. Teniendo esto en cuenta, la ecuación podría escribirse bajo una forma lineal,

$$\ddot{q} + \frac{g}{L} q + \frac{k}{m} . q = 0$$

$$\ddot{q} + \left(\frac{g}{L} + \frac{k}{m} \right) q = 0$$

SUBPROBLEMA 6.4
Definir las condiciones iniciales correspondientes por lo menos al sistema de coordenados utilizado para describir la posición del sistema

RESPUESTA AL SUBPROBLEMA 6.4
En este caso, las condiciones iniciales del problema quedan definidas por un desplazamiento inicial dado (no nulo) y una velocidad inicial nula. Si los ángulos positivos se miden en sentido anti-horario, las condiciones iniciales pueden expresarse como:

$$q(0) = arc\, sen \left(\frac{xo}{L} \right)$$

$$\dot{q}(0) = 0$$

Para el caso de la ecuación linealizada, la primera expresión se reduce a,

$$q(0) \cong \frac{xo}{L}$$