ACCEDE - INGENIERÍA AERONÁUTICA

PROBLEMA Nº 4

SITUACIÓN

Una corriente uniforme de velocidad U embiste a un cilindro bidimensional de radio R_c, que rota con velocidad angular ϖ, generando una circulación Γ en el flujo

INFORMACIÓN A TENER EN CUENTA

La circulación en una curva cerrada se define como $\Gamma = \oint \vec{V}.\vec{dl}$.

Considerar flujo potencial bidimensional incompresible.

La función de corriente resultante es

$$\Psi(r,\theta) = U\ r\ sen(\theta) - R_c^2\ U\ (\frac{sen(\theta)}{r}) - \frac{\Gamma}{2\pi}\ln(r)$$

Las componentes de la velocidad son respectivamente

$$v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta} \quad \text{y} \quad v_\theta = -\frac{\partial\Psi}{\partial r}$$

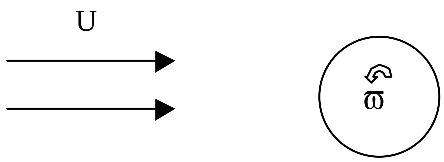
La ecuación de Bernoulli, para flujo potencial incompresible, con cambios de energía potencial despreciables, es:

$$P + \frac{1}{2}\rho V^2 = P_o \quad \text{(constante)}$$

Para el problema, se darán por conocidas la relaciones:

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{sen}(\theta)d\theta = 0 \qquad \int_0^{2\pi} \mathrm{sen}^2(\theta)d\theta = \pi \qquad \int_0^{2\pi} \mathrm{sen}^3(\theta)d\theta = 0 \qquad (1)$$

Esquema:



SUBPROBLEMA 4.1

Demostrar que la rotación del cilindro genera una circulación $\Gamma = 2\pi\varpi R_c^2$

RESPUESTA AL SUBPROBLEMA 4.1

La circulación se define como $\Gamma = \oint \vec{V}.\vec{dl}$

La velocidad tangencial que induce un cilindro de radio Rc que rota con velocidad angular ϖ es

$V_t = \varpi R_c$

Este valor es constante sobre toda la superficie del cilindro.

Si se evalúa la circulación sobre el cilindro, donde $\vec{dl} = R_c d\theta\, \vec{e_\theta}$ y tiene la misma dirección que $\vec{V_t}$, tenemos que

$$\Gamma = \oint \vec{V}.\vec{dl} = \int_0^{2\pi} (\varpi R_c) R_c d\theta$$ que,

como R_c y ϖ son constantes, vale $\Gamma = \varpi R_c^{\,2} \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi\varpi R_c^{\,2}$

Queda demostrado que la rotación introduce una circulación igual a $\boxed{\Gamma = 2\pi\varpi R_c^{\,2}}$

SUBPROBLEMA 4.2

Demostrar que la distribución de presión sobre el cilindro embestido por la corriente genera una fuerza resultante por unidad de longitud transversal, en dirección perpendicular a la corriente que lo embiste, de valor absoluto $F = \rho U\Gamma$

RESPUESTA AL SUBPROBLEMA 4.2

El potencial complejo de velocidades es

$$\Psi(r,\theta) = U\ r\ sen(\theta) - R_c^2\ U\ (\frac{sen(\theta)}{r}) - \frac{\Gamma}{2\pi}\ln(r)$$

Sobre el cilindro (r = R_c), sólo aparece la componente de velocidad tangencial, ya que la velocidad normal es nula en un obstáculo sólido.

La expresión de la velocidad tangencial es:

$$v_\theta = -\frac{\partial\Psi}{\partial r} = -Usen(\theta) - R_c^{\,2}\frac{Usen(\theta)}{r^2} + \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

La velocidad tangencial sobre el cilindro (r = R_c), queda:

$$v_\theta(R_c) = -2Usen(\theta) + \frac{\Gamma}{2\pi R_c}$$

La relación entre la distribución de presión sobre el cilindro, P(θ) y la presión de la corriente libre es:

$$P(\theta)+\frac{1}{2}\rho v_{\theta}^{2}(\theta)=P_{\infty}+\frac{1}{2}\rho U^{2}$$

$$\Rightarrow P(\theta)=P_{\infty}+\frac{1}{2}\rho U^{2}-\frac{1}{2}\rho v_{\theta}^{2}(\theta)=P_{\infty}+\frac{1}{2}\rho U^{2}-\frac{1}{2}\rho\left(4U^{2}sen^{2}(\theta)-2\frac{U\Gamma sen(\theta)}{\pi R_{c}}+\frac{\Gamma^{2}}{4\pi^{2}R_{c}^{2}}\right)$$

La componente vertical de la fuerza resultante se obtiene por integración sobre el cilindro de la componente vertical de la fuerza de presión

$$F_{y}=-\int_{0}^{2\pi}P(\theta)sen(\theta)R_{c}d\theta$$

(El signo menos porque para los valores positivos de θ, la contribución de la presión es hacia abajo)

Se analiza la contribución de cada término:

a) La contribución a F_y de los términos constantes ($P,\frac{1}{2}\rho U^{2},\frac{\Gamma^{2}}{4\pi^{2}R_{c}^{2}}$) es nula, ya que:

$$\int_{0}^{2\pi}\mathrm{Cte.sen}(\theta)\mathrm{R}_{c}\mathrm{d}\theta=\mathrm{Cte.Rc}\int_{0}^{2\pi}\mathrm{sen}(\theta)\mathrm{d}\theta=0 \qquad \text{(Por (1))}$$

b) La contribución a F_y de $-\frac{1}{2}\rho*4sen^{2}(\theta)$ es nula, ya que

$$\int_{0}^{2\pi}\mathrm{sen}^{2}(\theta)\mathrm{sen}(\theta)\mathrm{R}_{c}\mathrm{d}\theta=\mathrm{R}_{c}\int_{0}^{2\pi}\mathrm{sen}^{3}\mathrm{d}\theta=0 \qquad \text{(Por (1))}$$

c) La contribución a F_y de $\frac{1}{2}\rho\frac{2U\Gamma sen(\theta)}{\pi R_{c}}$ es:

$$-\rho\frac{U\Gamma}{\pi R_{c}}\int_{0}^{2\pi}sen(\theta)sen(\theta)R_{c}d\theta=-\frac{\rho U\Gamma}{\pi}\int_{0}^{2\pi}sen^{2}(\theta)d\theta=-\frac{\rho U\Gamma}{\pi}*\pi=-\rho U\Gamma$$

Por lo tanto, la fuerza vertical por unidad de envergadura del cilindro está dirigida hacia abajo (perpendicularmente a la corriente) y tiene magnitud ρUΓ.

SUBPROBLEMA 4.3

Enunciar y explicar la condición de Kutta para calcular el flujo potencial alrededor de un perfil aerodinámico

RESPUESTA AL SUBPROBLEMA 4.3

La condición de Kutta para que el flujo potencial calculado alrededor de un perfil aerodinámico se aproxime al flujo real puede enunciarse de distintas formas equivalentes (cualquiera de ellas se considerará correcta):

a) Un perfil con sustentación genera una circulación tal que el punto de remanso posterior debe coincidir con el borde de fuga del perfil.

b) Un perfil con sustentación genera una circulación tal que la velocidad en el borde de fuga es finita.

c) La línea de corriente que se abre para rodear al perfil, se cierra y abandona al mismo en el borde de fuga (*con una dirección comprendida entre las dos tangentes al intradós y al extradós respectivamente,* condición extendida de Kutta-Joukovsky).

Si se calcula el flujo potencial alrededor de un perfil, y no se tiene en cuenta la circulación que cumpla esta condición, las distribuciones obtenidas de velocidades y presiones (y en consecuencia el cálculo de la sustentación) no se aproximarán a los valores experimentales; la línea de corriente que embiste al perfil presentará un quiebre en un borde de fuga afilado, originándose en el mismo velocidades infinitas, imposibles en un flujo real.

Si, por el contrario, se aplica esta condición, el campo de flujo potencial calculado representa con muy buena aproximación el flujo alrededor de perfiles aerodinámicos a ángulos de ataque moderados (sin flujo desprendido, como en la entrada en pérdida), y los valores de sustentación y momento calculados aproximan con buena precisión los medidos experimentalmente. De allí la importancia de la condición de Kutta en el estudio de la aerodinámica aeronáutica.